Задания на олимпиаду по высшей математике

Задание 1

200 учеников выстроены прямоугольником по 10 человек в каждом поперечном ряду и по 20 человек в каждом продольном ряду. В каждом поперечном ряду выбран самый низкий ученик, а затем среди отобранных 20 выбран самый высокий; с другой стороны, из тех же 200 учеников в каждом продольном ряду выбран самый высокий ученик, а затем среди отобранных 10 выбран самый низкий. Кто из двоих окажется выше (если это разные лица) – самый низкий из самых высоких учеников, или самый высокий из самых низких?

Задание 2

Три брата получили 24 яблока, причем каждому досталось столько яблок, сколько ему было лет три года тому назад. Самый младший, мальчик очень смышленый, предложил братьям такой обмен яблоками:

– Я, – сказал он, – оставлю себе только половину имеющихся у меня яблок, а остальные разделю между вами поровну; после этого пусть наш средний брат тоже оставит себе половину, а остальные яблоки даст мне и старшему брату поровну, а затем и старший брат пусть оставит себе половину всех имеющихся у него яблок, а остальные разделит между мной и средним братом поровну. Братья, не подозревая коварства в таком предложении, согласились удовлетворить желание младшего. В результате … у всех оказалось яблок поровну.

Сколько же лет было малышу и каждому из остальных братьев?

Задание 3

Вычислить предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$.

Задание 4

Нам обоим вместе 63 года. Сейчас мне вдвое больше лет, чем вам тогда, когда мне было столько лет, сколько вам сейчас. Сколько лет мне и сколько лет вам?

Задание 5

Для нумерации страниц учебника потребовалось 411 цифр. Сколько страниц в учебнике?

Задание 6

Представить число 20 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма куба одного из них и квадрата другого была наименьшей.

Задание 7

Поперечное сечение канала имеет форму равнобедренной трапеции. При каком наклоне (φ) боков периметр сечения воды будет наименьшим, если площадь сечения воды в канале равна S, а уровень воды равен h.

Задание 8

Найти решение системы уравнений $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}=3, \\ \sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}=5, \\ \sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}=4. \end{cases}$

Задание 9

Вычислить неопределенный интеграл $\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x)\,dx$.

Задание 10

Найти сумму корней уравнения

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & \ln 4x & 5 & 4 \\ 0 & -2 & \sqrt{x+6} & 1 & e^x \\ 0 & 0 & x & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3-x \\ 0 & 0 & x & \sin^3 x \\ 0 & 2x+1 & 5 & \sqrt[3]{2x^2-8x} \\ -1 & 1 & x^{-2} & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & x & 1 \\ 4-x & 0 & 2 \\ -3 & 0 & x+3 \end{vmatrix} = 0$$

Задание 11

Группа студентов, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки «2», «3» «4», и «5». Сумма полученных оценок равна 93, причем троек было больше, чем «5», и меньше, чем «4». Число четверок делилось на 10, а число пятерок было четным. Сколько каких оценок получили студенты группы?

Задание 12

Найти сумму квадратов целых решений неравенства $f'(x)+g'(x)\le 0$, где $f(x)=2x^3+12x^2$, $g(x)=9x^2+72x$.